

Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ  
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1**  
**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ**  
**09 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2017**

**1. (20%)** Ας είναι  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάντηση τέτοια ώστε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  να υπάρχει. Δείξτε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιος ώστε η  $f$  να είναι **φραγμένη** στο  $(-\delta, \delta)$ .

**2. (20%)** Ας είναι  $f : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάντηση τέτοια ώστε

$$\lim f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim f\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας **υποχρεωτικά** τον  $(\epsilon - \delta)$  ορισμό του ορίου συνάρτησης, αποδείξτε ότι το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  **δεν** υπάρχει.

**3. (10%)** Ας είναι  $f : [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάντηση τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Χρησιμοποιώντας **υποχρεωτικά** τον  $(\epsilon - \delta)$  ορισμό του ορίου συνάρτησης, αποδείξτε ότι η  $f$  είναι **φραγμένη**.

**4. (10%)** Η ΦΟΕΑ θέλει να εκτυπώσει διαφημιστικά πόστερ για μια αιμοληψία που διοργανώνει. Κάθε πόστερ πρέπει να έχει ορθογώνιο σχήμα και για να συμπεριληφθούν όλες οι πληροφορίες χρειάζονται ακριβώς  $2400 \text{ cm}^2$  επιφάνειας. Επίσης, το τυπογραφείο απαιτεί να υπάρχουν τα εξής περιθώρια: αριστερά  $5 \text{ cm}$ , δεξιά  $5 \text{ cm}$ , πάνω  $7,5 \text{ cm}$  και κάτω  $7,5 \text{ cm}$ . Υπολογίστε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ολόκληρο το πόστερ ώστε να **ελαχιστοποιηθεί** η ποσότητα χαρτιού που θα χρειαστεί.

**5. (20%)** Ας είναι  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάντηση τέτοια ώστε  $g(0) = g'(0) = 0$  και  $g''(0) = 18$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Βρείτε το  $f'(0)$ , χρησιμοποιώντας τον Κανόνα D' Hospital **μόνον** μια φορά.

**6. (20%)** Ας είναι  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Q}$  μια συνεχής συνάντηση με  $f(0.5) = 0.5$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι **σταθερή**.